

$$(x, y) \rightarrow (0, 0)$$

إذا كان الدالة المعرفة بالشكل :

$$f: \mathbb{R}^2 - (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{\sin x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

أدرس وجود النهاية عند  $(0, 0)$  عن طريق

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

**الحل:** إذا أخذنا المتتاليات في  $\mathbb{R}$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

وبما أن النهايتان غير متساويتان وبالتالي حسب نتيجة سابقة بالنهاية غير موجودة.

**تمرين 13:** ليكن  $a$  عدد صحيحاً موجباً أكبر من 1 وليكن  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  أعداد حقيقية

غير سالبة و  $f$  دالة حقيقية المعرفة على المجموعة

$$A = \mathbb{R}_+^n - \{(0, 0, \dots, 0)\}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^b}$$

**پ-** أثبت أنه إذا كان  $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 2b$  فإن  $\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

ب- أثبت أن إذا كان  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2b$  فإن ليس  $f$  نهاية في النقطة  $(0, 0, \dots, 0)$  وأن  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$

ج- أثبت أن إذا كانت  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2b$  فإن ليس  $f$  نهاية في النقطة  $(0, 0, \dots, 0)$  وإن  $f$  ليست محدودة في جوار هذه النقطة.

الحل: نلاحظ أنه إذا كان  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$  فمقتضى:

$$0 \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{\sup_{1 \leq i \leq n} (x_i)^{2b}} \leq \frac{(\sup x_i)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}{(\sup x_i)^{2b}} \\ = (\sup x_i)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2b}$$

والآن نريد فاقصة  $(p, b, p)$

p- إذا كان  $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 2b$  فإن

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} (\sup x_i)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2b} = 0 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$$

وهذا يؤدي أنه

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

لأنه  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\sup x_i)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2b}$  وبما أن الكسرة تسعى نحو الصفر وبالتالي الصيغة تسعى نحو الصفر.

ب-  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2b$  فإن  $0 \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$

والآن نريد إثبات أنه  $f$  ليس له نهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x, \dots, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}{(n x^2)^b} =$$

$$= \frac{1}{n^b} \lim_{x \rightarrow 0} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x, \dots, x) = \frac{1}{n^b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0, \dots, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^{2b}} = 0$$

وبما أن القاطنين غير متساويين، فإن كلا من المتاليتين:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0); \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x, \dots, x) = (0, 0, \dots, 0)$$

تتجهان إلى نفس النفاية ونسباً نتيجة سابقة ليست للدالة نفاية في النقطة  $(0, 0, \dots, 0)$

جـ - إذا كان  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2b$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, x, \dots, x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}{(nx^2)^b} = \frac{1}{n^b} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{2b - a_1 - a_2 - \dots - a_n}} = \frac{1}{n^b} \cdot \infty = \infty$$

ليست لـ  $f$  نفاية في النقطة  $(0, 0, \dots, 0)$  وأن  $f$  ليست متصلة في جوار هذه النقطة.

**مثال 4:** إذا كانت  $f$  الدالة المعرفة بالشكل:

$$f: \mathbb{R}^2 - (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$$

ارسم وجود النفاية  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} \stackrel{\text{أوبنلا}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

وبما أن النهايتين مختلفتين رغم أن كلاهما المتساويتان

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = (0, 0) ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = (0, 0)$$

نتجهان إلى نفس الدالة حسب طريقة أخرى سابقة فليس لدالة نهاية.

مثال 5: إذا كانت  $f$  الدالة الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$  بالشكل التالي:

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2 \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = 0 \text{ أثبت}$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{الحل}$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \text{ لأنه حسب تعويض (3)}$$

$$\text{وأن } a_1 + a_2 + \dots + a_n > 2 \text{ فإن النهاية تساوي الصفر}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \ln u = 0 \text{ لأنه حسب أويلر } \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \frac{1}{u} = -u = 0$$

وأن النهاية الجداء تساوي جداء النهايات فإن نهاية:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) &= \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} (x^2 + y^2 + z^2) \ln(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

## ★ استمرارية الدوال:

**تعريف:** ليكن  $(E, d_E)$ ,  $(F, d_F)$  فضاءين مترين و  $f$  تطبيقاً معرفاً على  $E$  وبأخذ القيم في  $F$  و  $a$  نقطة من  $E$  فنقول عن التطبيق  $f$  أنه مستمر في النقطة  $a$  إذا قابل أي عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد حقيقي موجب  $\delta$  بحيث أنه إذا كان  $x \in E$   $d_E(x, a) < \delta$  فإن  $d_F(f(x), f(a)) < \epsilon$  وإذا كان  $f$  مستمراً في كل نقطة من مجموعة جزئية  $A$  من  $E$  فنقول أنه مستمر على  $E$ .

**نتيجة 1:** نستنتج من التعريف الأخير ومن تعريف النهاية أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق  $f$  مستمراً في النقطة  $a$  في  $E$  هو أن يكون:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**التي 2:** نستنتج من التعريف الأخير ومن المبرهنات و قبل الأخيرة أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق  $f$  مستمراً في النقطة  $a$  من  $E$  هو أن تتقارب المتتالية  $f(x_n)$  من  $f(a)$  وذلك أي أن كان المتتالية  $x_n$  في  $E$  والمتتالية  $a$ .

## مبرهنة:

ليكن  $f$  و  $g$  دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين  $A$  و  $B$  على الترتيب من  $\mathbb{R}^n$  وليكن  $a$  نقطة من تقاطع  $A \cap B$ ، إذا كانت الدالتين  $f$  و  $g$  مستمرتين في النقطة  $a$  فإن كلا من  $f + g$  و  $f - g$  و  $f \cdot g$  دالة مستمرة في  $a$  وإذا كان  $g(a) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{f}{g}$  مستمرة أيضاً في النقطة  $a$ . **البرهان:** يفتتح مباشرة من المبرهنات الأخيرة تبعاً لنهاية "أ"

**أمثلة:** الدوال الكسرية.  $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow x_i \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$$

**الحل:** ليكن  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  نقطة اختيارية.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

$$\Rightarrow d(x; a) = |x_i(x) - x_i(a)| = |x_i - a_i|$$

$$\leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{محققة دوماً}$$

$$= d_2(x, a) < \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

أي أن الدالة  $x_i$  مستمرة في النقطة الاختيارية  $a$  في  $\mathbb{R}^n$  وبالتالي فهي مستمرة على  $\mathbb{R}^n$ .

**تمرين 2:** إذا كانت  $f$  الدالة الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{R}^2$  بالشكل التالي:

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

إن الدالة  $f$  مستمرة في النقطة  $(0, 0)$  وذلك حسب التمرين 1 في النهايات فإن النهاية

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

**تمرين 3:** إذا كانت  $f$  الدالة الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{R}^2$  بالشكل التالي:

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x \cdot y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

وحسب التمرين 2 ليس هنالك نهاية وبالتالي الدالة  $f$  ليست مستمرة في النقطة  $(0, 0)$ .

تمرين 4: إذا كانت الدالة الحقيقية المعرفة على  $\mathbb{R}^2$  بالشكل التالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

وحسباً تمرين (15) فإن نهايتها تساوي الصفر وصورتها تساوي الصفر وبالتالي مستمرة في النقطة  $(0, 0)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subseteq \mathbb{R}^m$$

حتى تكون هذه الدالة مستمرة في النقطة  $x_0$  من  $D$  هو أن تكون الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

$$x \rightarrow f_i(x) \quad i=1, 2, \dots, m$$

مستمرة في النقطة  $x_0$  "أي يجب أن تكون كل دالة في هذه الدوال مستمرة في  $x_0$ "

البرهان: لنفرض الشرط: لنفرض أن  $f$  مستمرة في النقطة  $x_0$  عندئذٍ يقابل كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد حقيقي موجب  $\delta$  بحيث إذا كانت  $x \in D$  و  $d(x, x_0) < \delta$  فإن حسب تعريف الاستمرار  $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$$\text{أي أن } \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \epsilon \quad \text{ولكن}$$

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \epsilon$$

$|f_i(x) - f_i(x_0)| = |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon \quad i=1, 2, \dots, m$  وستنتج أن الدوال الحقيقية  $f_i$  مستمرة في النقطة  $x_0$

كفاية الشرط: إن الدوال  $f_i$  "  $i = 1, \dots, m$  " مستمرة في النقطة  $x_0$  عندئذ يتحقق  
كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon$  عدد حقيقي  $\delta$  بحيث إذا كان  $\delta(x, x_0) < \delta$  فإن

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) = |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}$$

حيث  $i = 1, \dots, m$

إن المافية

$$d_2(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\epsilon^2}{m} + \frac{\epsilon^2}{m} + \dots + \frac{\epsilon^2}{m}}_{m \text{ مرة}}}$$

$$< \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

وهذا يثبت أن الدالة  $f$  مستمرة في النقطة  $x_0$